CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

Session de 1976

M A T H E M A T I Q U E S I

Suivant l'usage, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul , $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs.

x étant une variable réelle positive, on appelle E(x) la partie entière de x.

On pose $F(x) = x - E(x)$; on a donc $0 \leqslant F(x) < 1$.

On appelle D(x) la distance de x à l'entier qui lui est le plus proche, à savoir :

Si $F(x) \leqslant \frac{1}{2}$ $\qquad D(x) = F(x)$

Si $F(x) > \frac{1}{2}$ $\qquad D(x) = 1 - F(x)$

Les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et j^2.

I 1° - On suppose $0 < x \leqslant 1$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = F(x^n)$ et de premier terme u_0. Eventuellement donner sa somme.

2° - On suppose que $x = a + \sqrt{b}$

$(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ $\qquad \sqrt{b} \notin \mathbb{N}^*$ $\qquad |a - \sqrt{b}| < 1$

2.1. - Montrer que :

$$(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} \left[(a + \sqrt{b})^n - (a - \sqrt{b})^n \right] \in \mathbb{N} \qquad n \in \mathbb{N}$$

2.2. $F\left[(a + \sqrt{b})^n\right]$ tend-il vers une limite quand n augmente indéfiniment ?

Examiner les divers cas suivant la position de $\sqrt{b}$ par rapport à a.

2.3. - Etudier la nature de chacune des séries de terme général

$u_n = F\left[(a + \sqrt{b})^n\right]$

$v_n = u_{2n}$ et de premiers termes u_0, v_0, w_0, r_0

$w_n = u_{2n+1}$

$r_n = D\left[(a + \sqrt{b})^n\right]$

Calculer leur somme quand elles sont convergentes.

2.4. - Appliquer ces résultats aux deux cas :

$x = 1 + \sqrt{2}$; $x = 2 + \sqrt{2}$

.../...

3°- Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = F\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}\,(3+\sqrt{5})^n\right]$$

II 1° - Soit l'équation du troisième degré :

$$x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

Montrer qu'elle a une racine réelle λ_1 et deux racines complexes λ_2, λ_3 ayant toutes deux un module inférieur à 1.

2° - On effectue dans l'équation précédente le changement de variables

$$x = 2 + y + z \qquad \text{avec } yz = 3$$

Calculer λ_1, λ_2, λ_3.

3° - Montrer que pour n entier positif ou nul

$$(L_1) \qquad \lambda_1^n = a_n + b_n \sqrt[3]{3} + c_n \sqrt[3]{9} \quad \text{avec } (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{N}^3$$

en établissant, en particulier, que $\begin{pmatrix} a_n + 1 \\ b_n + 1 \\ c_n + 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$\mathcal{M}$ étant une matrice carrée de format 3 x 3 dont les éléments appartiennent à $\mathbb{N}$.

4° - Etablir que les valeurs propres de $\mathcal{M}$ sont λ_1, λ_2, λ_3.

Montrer que l'on peut prendre comme vecteur propre réel celui de coordonnées :

$$\sqrt[3]{9}\ ,\ \sqrt[3]{3}\ ,\ 1$$

5° - Calculer ensuite a_n en fonction uniquement de λ_1^n, λ_2^n, λ_3^n en montrant

que : $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

et en utilisant la diagonalisation d'une matrice.
Etudier la nature de la série de terme général $D(\lambda_1^n)$.

6° - Revenant à la relation (L_1) (partie II, § 3°), montrer que l'on peut trouver respectivement des relations de même type, dans le plan complexe (L_2) pour λ_2^n et (L_3) pour λ_3^n.

Retrouver à l'aide de ces 3 relations (L_1), (L_2), (L_3) le résultat du paragraphe 5° ci-dessus relatif à l'expression de a_n.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail